PROBLEMAS MÉTRICOS

1.- Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A(1, 1, 1), B(3, 2, 1) y C(−1, 3, 2).

2.- Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A(0,0,0), B(2, 1, 3), C(−1, 3, 1) y D(4, 2, 1).

3.- Dada la recta r = $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{1}$ **y el plano** $\pi \equiv x+y+z-4=0$ **, hallar la ecuación de la recta s, proyección ortogonal de r sobre π.**

4.- Calcular la distancia entre las rectas:

$$r=\frac{x-2}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{4} \qquad s=\begin{cases} x=5+\lambda \\ y=-1 \\ z=8+2\lambda \end{cases}$$

5.- Hallar el simétrico del punto A(3, 2, 1) respecto del plano $x+y+z+21=0$

6.- Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $6x+3y+2z=6$ **con los ejes coordenados.**

7.- Dado el plano de ecuación $\pi \equiv x+2y+3z=1$ **y el punto A(1, 1, 1), hallar las coordenadas del pie de la perpendicular trazada desde A a ese plano (o sea, la proyección ortogonal de A sobre él).**

8.- Determinar la ecuación del plano π que está a $\sqrt{6}$ **de distancia del origen y es**

9.- Hallar la distancia entre el punto A(3, 2, 7) y la recta del primer octante.

10.- Sabiendo que los lados de un cuadrado están en las rectas:

$$r=\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1} \qquad s=\begin{cases} x-y+z=2 \\ 3x-y-z=-4 \end{cases}, \text{ calcular su área.}$$

SOLUCIONES EJERCICIOS PROBLEMAS MÉTRICOS

1.- Hallar el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A(1, 1, 1), B(3, 2, 1) y C(−1, 3, 2).

Sol:

$$\overrightarrow{AB} = (3-1, 2-1, 1-1) = (2, 1, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1-1, 3-1, 2-1) = (-2, 2, 1)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 6^2} = \sqrt{41}$$

$$A_T = \frac{1}{2}\sqrt{41}\,u^2$$

2.- Hallar el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos A(0,0,0), B(2, 1, 3), C(−1, 3, 1) y D(4, 2, 1).

Sol:

$$\overrightarrow{AB} = (2-0, 1-0, 3-0) = (2, 1, 3)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-1-0, 3-0, 1-0) = (-1, 3, 1)$$

$$\overrightarrow{AD} = (4-0, 2-0, 1-0) = (4, 2, 1)$$

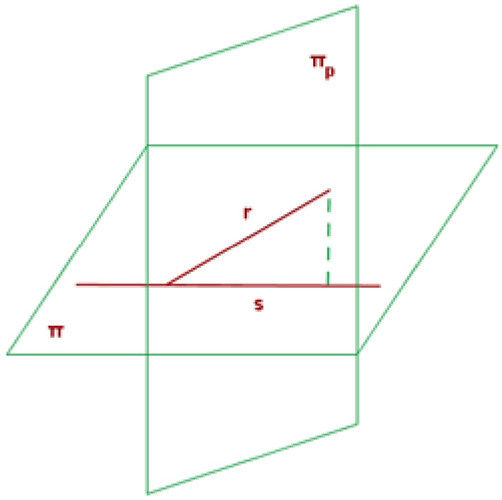
$$V = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{matrix}\right\| = \frac{35}{6}\,u^3$$

3.- Dada la recta r = $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$ y el plano $\pi \equiv x + y + z - 4 = 0$, hallar la ecuación de la recta s, proyección ortogonal de r sobre π.

Sol:

La recta s es la intersección del plano π con el plano π_p que contiene a la recta r y es perpendicular a π.

El plano π_p queda determinado por el punto A(2,−1, 0), el vector (2, 1, 1) y el vector normal, (1, 1, 1), del plano perpendicular π.



$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y+1 & 1 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad -y+z-1=0$$

$$s \equiv \begin{cases} x+y+z-4=0 \\ -y+z-1=0 \end{cases}$$

4.- Calcular la distancia entre las rectas:

$$r = \frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{4} \qquad s = \begin{cases} x = 5+\lambda \\ y = -1 \\ z = 8+2\lambda \end{cases}$$

Sol:

$A(2,2,-1) \qquad \vec{u} = (3,-1,4)$

$B(5,-1,8) \qquad \vec{v} = (1,0,2)$

$\overrightarrow{AB} = (5-2, 2+1, 8+1) = (3,-3,9)$

$$\left|\left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right]\right| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 9$$

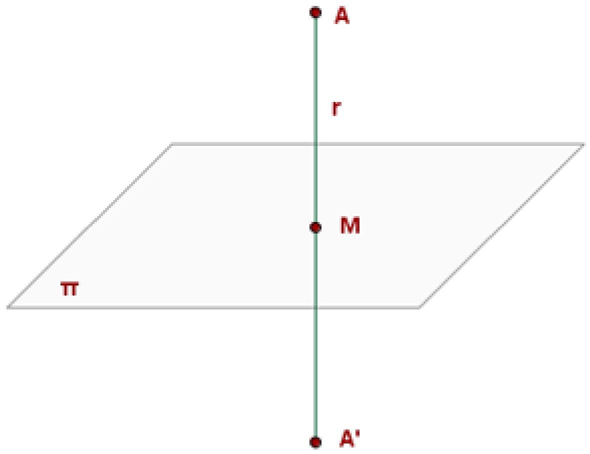
$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$$

$$d(r,s) = \frac{9}{3} = 3$$

5.- Hallar el simétrico del punto A(3, 2, 1) respecto del plano $\mathbf{x + y + z + 21 = 0}$

Sol:



En primer lugar calculamos r, que es la recta que pasa por A y es perpendicular a π.

$$r \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1}$$

Hallamos el punto de intersección de la recta r y el plano π.

$$\begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x - z - 2 = 0 \\ x + y + z + 21 = 0 \end{cases} \qquad M(-6, -7, -8)$$

Teniendo en cuenta las **coordenadas del punto medio de un segmento**, podemos hallar el extremo A'.

$$-6 = \frac{3+x}{2} \qquad -7 = \frac{2+y}{2} \qquad -8 = \frac{1+z}{2}$$

$$A'(-15, -16, -17)$$

6.- Calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $\mathbf{6x + 3y + 2z = 6}$ con los ejes coordenados.

Sol:

$$y = 0,\ z = 0 \rightarrow \quad x = 1 \qquad A(1, 0, 0)$$

$$x = 0,\ z = 0 \rightarrow \quad y = 2 \qquad B(0, 2, 0)$$

$$x = 0,\ y = 0 \rightarrow \quad z = 3 \qquad C(0, 0, 3)$$

$$\overrightarrow{AB} = (0-1, 2-0, 0-0) = (-1, 2, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0-1, 0-0, 3-0) = (-1, 0, 3)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$A_T = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = \frac{7}{2}u^2$$

7.- Dado el plano de ecuación $\pi \equiv x + 2y + 3z = 1$ y el punto A(1, 1, 1), hallar las coordenadas del pie de la perpendicular trazada desde A a ese plano (o sea, la proyección ortogonal de A sobre él).

Sol:

$y = 0,\ z = 0 \rightarrow \quad x = 1 \qquad\qquad A(1,0,0)$

$x = 0,\ z = 0 \rightarrow \quad y = 2 \qquad\qquad B(0,2,0)$

$x = 0,\ y = 0 \rightarrow \quad z = 3 \qquad\qquad C(0,0,3)$

$$\overrightarrow{AB} = (0-1, 2-0, 0-0) = (-1,2,0)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0-1, 0-0, 3-0) = (-1,0,3)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$A_T = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = \frac{7}{2}u^2$$

8.- Determinar la ecuación del plano π que está a $\sqrt{6}$ de distancia del origen y es paralelo a aquel que tiene por ecuación $2x + y - z = 3$.

Sol:

$$2x + y - z + k = 0$$

$$d(O,\pi) = \frac{|0+0-0+k|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

$k = \sqrt{6} \qquad\qquad k = -\sqrt{6}$

$$\pi_1 \equiv 2x + y - z + \sqrt{6} = 0$$

$$\pi_1 \equiv 2x + y - z - \sqrt{6} = 0$$

9.- Hallar la distancia entre el punto A(3, 2, 7) y la recta del primer octante.

Sol:

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad B(0,0,0) \qquad \vec{u}_r = (1,1,1)$$

$$\overrightarrow{AB} = (0-3, 0-2, 0-7) = (-3,-2,-7)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \vec{u}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -2 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k}$$

$$d(A,r) = \frac{\sqrt{5^2 + (-4)^2 + (-1)^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{42}}{\sqrt{3}} = \sqrt{14}$$

10.- Sabiendo que los lados de un cuadrado están en las rectas:

$$r = \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1} \qquad s = \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - y - z = -4 \end{cases},$$ **calcular su área.**

Sol:

Determinación lineal de la recta r.

$$A(1,0,2) \qquad \vec{u} = (1,2,1)$$

Determinación lineal de la recta s.

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\begin{array}{r} x - y + z = 2 \\ -3x + y + z = 4 \\ \hline -2x \quad + 2z = 6 \end{array} \qquad x = 0 \quad z = 3 \quad y = 1$$

$$B(0,1,3) \qquad \vec{v} = (2,4,2)$$

$$\overrightarrow{AB} = (0-1, 1-0, 3-2) = (-1,1,1)$$

La distancia de la r a la recta s es igual a la distancia del punto B a la recta r.

$$\overrightarrow{AB} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{i} + 3\vec{k}$$

$$d(B, r) = \frac{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

El lado del cuadrado es igual a la distancia entre las rectas r y s.

$$A_{\square} = \frac{7}{3} u^2$$